ESERCIZIO A

- MODELLO SISTEMA SPAZIO DEGLI STATI $\rightarrow$ ricavare A, B, C, D.

* TEMPO CONTINUO

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ y(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases}$$

* TEMPO DISCRETO

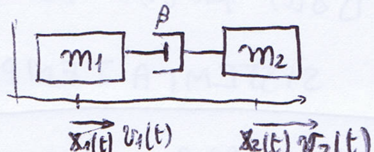
$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \\ y(k) = C\underline{x}(k) + D\underline{u}(k) \end{cases}$$

▶ Sistema Elettrico: considero come stati le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti delle induttanze. Ricordo le seguenti relazioni:

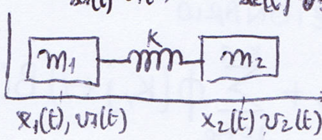
$i = C\dfrac{dv}{dt}$, $v = R \cdot i$; $v = L\dfrac{di}{dt}$; leggi di Kirchhoff.

▶ Sistema Meccanico: considero come stati le posizioni dei corpi. Deve valere

- $\sum F = m \cdot \dfrac{dv}{dt} = m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2}$ somma delle forze = massa per accelerazione ($\ddot{x}$)
- $F_1 = \beta(v_2 - v_1) = -F_2$ attrito viscoso

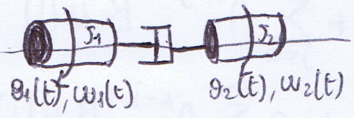


- $F_1 = K(x_2 - x_1) = -F_2$ elasticità molla

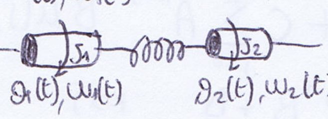


▶ Rotazione Meccanica: considero come stati le posizioni angolari dei corpi $\theta(t)$. Deve valere

- $\sum T = J\dfrac{d\omega}{dt} = J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ momento di inerzia
- $T_1 = \beta(\omega_2 - \omega_1) = -T_2$ attrito viscoso



- $T_1 = K(\theta_2 - \theta_1) = -T_2$ elasticità molla



Casi particolari

- $\dddot{x}(t) = u(t)$ pongo $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ con $\begin{matrix} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = \dot{x}(t) \\ x_3(t) = \ddot{x}(t) \end{matrix}$; $\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

- $x(k+1) = x(k) + x(k-1) + x(k-2)$ pongo $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$ con $\begin{matrix} x_1(k) = x(k) \\ x_2(k) = x(k-1) \\ x_3(k) = x(k-2) \end{matrix}$

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(k).$$

EVOLUZIONE SISTEMI A TEMPO CONTINUO

* CASO NON STAZIONARIO

$$x(t) = \phi(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t-\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = C(t)\phi(t,t_0)\,x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^{t} \phi(t-\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau + D(t)u(t)$$

* CASO STAZIONARIO $(t_0=0)$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \quad \text{con } H(s)\in\mathbb{R}^{p\times m}$$ p = uscite, m = ingressi — Matrice di trasferimento

$$H(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad \text{per } t\geq 0$$ Matrice di risposta all'impulso

EVOLUZIONE SISTEMI A TEMPO DISCRETO

* CASO NON STAZIONARIO

$$x(k) = \phi(k,k_0)x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1}\phi(k,j+1)B(j)u(j) \qquad k>k_0$$

$$y(k) = C(k)\phi(k,k_0)x_0 + C(k)\sum_{j=k_0}^{k-1}\phi(k,j+1)B(j)u(j) + D(k)u(k) \qquad k>k_0$$

* CASO STAZIONARIO

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1}A^{k-j-1}Bu(j) \qquad k>0$$

$$y(k) = CA^k x_0 + C\sum_{j=0}^{k-1}A^{k-j-1}Bu(j) + Du(k) \qquad k>0$$

$$H(k,j) = \begin{cases} CA^{k-j-1}B + D & k>j \\ D & k=j \\ 0 & k<j \end{cases} \Rightarrow H(k) = \begin{cases} CA^{k-1}B + D & k>0 \\ D & k=0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$$

STATI DI EQUILIBRIO

Sono quegli stati x tali che $\dot{x}(t)$ o $x(k+1)$ sono nulli in corrispondenza di ingressi nulli. Si calcolano come:

$$\operatorname{Ker} A \iff Ax = 0.$$

FUNZIONE DI MATRICE

* Metodo del polinomio interpolatore

1) Calcolo il polinomio minimo di A: $m(\lambda) = \dfrac{P(\lambda)}{b(\lambda)}$ dove $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ è il polinomio caratteristico di A e $b(\lambda)$ è il M.C.D. di tutti i minori di ordine $n-1$ (calcolo il determinante di ogni minore e vedo le parti comuni)

$\therefore m(\lambda) = \lambda^{l} + \alpha_{l-1}\lambda^{l-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ con l = grado di $m(\lambda)$

2) $f(A) = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i = \gamma_0 I + \gamma_1 A + \dots + \gamma_{l-1} A^{l-1}$. Devo trovare $\gamma_0, \gamma_1, \dots$

3) Imposto la matrice:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_h & \lambda_h^2 & \dots & \lambda_h^{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

dove
- $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ sono le radici distinte di $m(\lambda)$
- l è il grado di $m(\lambda)$

se gli autovalori non sono tutti distinti:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ D f(\lambda_1) \\ \vdots \\ D^{l_1-1} f(\lambda_1) \\ \hline f(\lambda_2) \\ \vdots \\ D^{l_2-1} f(\lambda_2) \\ \hline \vdots \\ \hline f(\lambda_h) \\ \vdots \\ D^{l_h-1} f(\lambda_h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \dots & (l-1)\lambda_1^{l-2} \\ & & \vdots & & \\ \hline 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ & & \vdots & & \\ \hline & & \vdots & & \\ \hline 1 & \lambda_h & \lambda_h^2 & \dots & \lambda_h^{l-1} \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

$A = \lambda_1$

dove:
- l_1 è la molteplicità della 1ª radice (λ_1)
- l è il grado di $m(\lambda)$
- $D f(\lambda_1)$ è la derivata della funzione di matrice calcolata nella radice λ_1.

Metodo valido sia a tempo continuo (per calcolare e^{At}) sia a tempo discreto (per calcolare A^k).

STABILITÀ

* TEMPO CONTINUO
  - Sistema asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ autovalori di A tutti a parte reale negativa
  - Sistema semplicemente stabile $\Leftrightarrow$ valgono:
    - nessun autovalore di A ha parte reale positiva
    - gli autovalori di A a parte reale nulla sono zeri semplici (molteplicità 1) del polinomio minimo.
  - Sistema instabile

* TEMPO DISCRETO
  - Sistema asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ autovalori di A con modulo minore di 1.
  - Sistema semplicemente stabile $\Leftrightarrow$ valgono:
    - nessun autovalore di A ha modulo maggiore di 1
    - gli autovalori di A con modulo uguale a 1 hanno molteplicità 1.
  - Sistema instabile.

ESERCIZIO B

TEMPO CONTINUO

* CASO NON STAZIONARIO.

▶ Insieme degli stati raggiungibili dall'evento (t_0, x_0)

$$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,x_0) = \{ x_1 : x_1 = \varphi(t_1,t_0,x_0,u(\cdot)) \quad \forall u(\cdot) \in U_f \}$$

se $x_0 = 0$

$$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,0) = \left\{ x_1 : x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1,\tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau, \ u(\cdot) \in U_f \right\}$$

▶ Insieme degli stati controllabili all'evento (t_1, x_1)

$$\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1) = \{ x_0 : x_1 = \varphi(t_1,t_0,x_0,u(\cdot)) \quad \forall u(\cdot) \in U_f \}$$

se $x_1 = 0$

$$\mathcal{R}^-(t_0,t_1,0) = \left\{ x_0 : 0 = \phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1,\tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau, \ u(\cdot) \in U_f \right\}$$

▶ Insieme degli stati raggiungibili nell'intervallo $[t_0, t_1]$

$$W^+(t_0,t_1,x_0) = \{ x_1 : x_1 = \varphi(t,t_0,x_0,u(\cdot)), \forall u(\cdot) \in U_f, \forall t \in [t_0,t_1] \}$$

▶ Insieme degli stati controllabili nell'intervallo $[t_0, t_1]$

$$W^-(t_0,t_1,x_1) = \{ x_0 : x_1 = \varphi(t_1,t,x_0,u(\cdot)), \forall u(\cdot) \in U_f, \forall t \in [t_0,t_1] \}$$

▶ Insieme degli stati finali compatibili con la coppia $(u(\cdot), y(\cdot))$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$

$$Q^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = \{ x_1 : x_1 = \varphi(t_1,t_0,x_0,u(\cdot)), \ x_0 \in Q^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)), \ \forall t \in [t_0,t_1] \}$$

▶ Insieme degli stati iniziali compatibili con la coppia $(u(\cdot), y(\cdot))$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$

$$Q^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = \{ x_0 : y(t) = \gamma(t,t_0,x_0,u(t)), \forall t \in [t_0,t_1] \}$$

▶ Gramiano di raggiungibilità:

$$W_r(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1,\tau) B(\tau) B^T(\tau) \phi^T(t_1,\tau)\, d\tau . \quad \text{Vale } \mathcal{R}^+(t_0,t_1,0) = \operatorname{im} W_r(t_0,t_1).$$

▶ Gramiano di Controllabilità

$$W_c(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0,\tau) B(\tau) B^T(\tau) \phi^T(t_0,\tau)\, d\tau . \quad \text{Vale } \mathcal{R}^-(t_0,t_1,0) = \operatorname{im} W_c(t_0,t_1)$$

▶ Ingresso per raggiungere $x_1 \in \mathcal{R}^+(t_0,t_1,0)$ dall'origine:

$$\begin{cases} u(t) = B^T(t)\,\phi^T(t_1,t)\,\eta_1 , \quad t \in [t_0,t_1] \\ W_r(t_0,t_1)\,\eta_1 = x_1 \end{cases}$$

▶ Ingresso per raggiungere l'origine dallo stato $x_0 \in \mathcal{R}^-(t_0,t_1,0)$

$$\begin{cases} u(t) = -B^T(\tau)\,\phi^T(t_0,t)\,\eta_1 \\ W_c(t_0,t_1)\,\eta_1 = x_0 \end{cases}$$

▶ Ingresso per raggiungere lo stato x_1 al tempo t_1 dallo stato x_0 al tempo t_0

$$u(t) = B^T(\tau)\,\phi^T(t_1,t)\,W_r^{-1}(t_0,t_1)\left[x_1 - \phi(t_1,t_0)x_0\right]$$ anche esprimibile come

$$u(t) = -B^T(\tau)\,\phi^T(t_0,t)\,W_c^{-1}(t_0,t_1)\left[x_0 - \phi(t_0,t_1)x_1\right] \qquad \forall t \in [t_0,t_1]$$

* CASO STAZIONARIO

$\phi(t_1,t_0) = e^{A(t_1-t_0)}$ e le matrici A e B non dipendono da τ.

▶ Gramiano di raggiungibilità

$$W_r(0,T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)}\,B B^T e^{(T-\tau)A^T} d\tau$$ dove $T = t_1$, $0 = t_0$

▶ Gramiano di controllabilità

$$W_c(0,T) = \int_0^T e^{-A\tau}\,B B^T e^{-A^T\tau} d\tau$$

▶ Matrice di raggiungibilità e di controllabilità

$$R = \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B\right]$$

Vale $\mathcal{R}_T^+(0) = \operatorname{im} R$; $\mathcal{R}_T^-(0) = e^{-AT}\cdot\mathcal{R}_T^+(0) = \mathcal{R}_T^+(0)$ perché invariante

▶ Sottospazio di raggiungibilità / controllabilità

$\mathcal{R} = \operatorname{im} R$. Se $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ il sistema è completamente controllabile / raggiungibile.

TEMPO DISCRETO - CASO STAZIONARIO

$\phi(k_1, k_0) = A^{k_1 - k_0}$, considero $k_0 = 0$.

▶ Matrice di controllabilità (se $k = n$)

$$R_k = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{k-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times mk}$$

▶ Spazio di raggiungibilità in k_1 passi dall'origine

$$\mathcal{R}^+_{k_1}(0) = \operatorname{im} R_{k_1}$$

▶ Ingresso per passare dallo stato x_0 allo stato x_1 in k_1 passi

$$R_{k_1} U_{k_1} = x_1 - A^{k_1} x_0 \rightarrow U_{k_1} = R^T_{k_1} W_r^{-1}(0, k_1)(x_1 - A^{k_1} x_0)$$

▶ Sottospazio di controllabilità all'origine in k_1 passi

$$\mathcal{R}^-_{k_1}(0) = \left\{ x_0 : 0 = A^{k_1} x_0 + R_{k_1} U_{k_1},\ U_{k_1} \in \mathbb{R}^{mk_1} \right\}$$

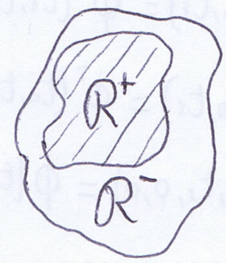
$$\mathcal{R}^-_{k_1}(0) = \underset{\overset{\parallel}{(A^{k_1})^{-1}}}{A^{-k_1}} \mathcal{R}^+_{k_1}(0)$$ controllabilità e raggiungibilità NON coincidono

$$\Rightarrow A^{-1}\mathcal{Y} = (A^T \mathcal{Y}^\perp)^\perp$$

* se $k_1 \geq n$

$$\mathcal{R}^-_{k_1}(0) = A^{-n} \mathcal{R}^+_{k_1}(0) \qquad \mathcal{R}^- = \mathcal{R}^-_{k_1}(0) \ ; \ \mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+_{k_1}(0)$$

$$\mathcal{R}^- = A^{-n} \mathcal{R}^+$$ (ricordo che $\mathcal{R}^+ = \operatorname{im} R$).



▶ Gramiano di raggiungibilità

$$W_r(0, k_1) = \sum_{j=0}^{k_1 - 1} A^{k_1 - j - 1} B B^T (A^T)^{k_1 - j - 1} \qquad \mathcal{R}^+ = \operatorname{im} W_r(0, k_1)$$

▶ Gramiano di controllabilità

$$W_c(0, k_1) = \sum_{j=0}^{k_1 - 1} A^{-(j+1)} B B^T (A^T)^{-(j+1)}$$

▶ Proprietà

$$W_r(0, k_1) = A^{k_1} W_c(0, k_1) (A^T)^{k_1}$$

OSSERVABILITÀ E RICOSTRUIBILITÀ - TEMPO CONTINUO

* CASO NON STAZIONARIO

▸ Insieme degli stati iniziali compatibili con $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$

$$Q^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = \left\{x_0 : y(t) = C(t)\phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t), \forall t\in[t_0,t_1]\right\}$$

▸ Insieme degli stati Finali compatibili con $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$

$$Q^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = \left\{x_1 : x_1 = \phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1}\phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \; x_0\in Q^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))\right\}$$

▸ Sottospazio di inosservabilità : $Q^-(t_0,t_1,0,0)$

▸ Sottospazio di non ricostruibilità : $Q^+(t_0,t_1,0,0)$

▸ Gramiano di osservabilità

$$W_o(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\phi(\tau,t_0)d\tau. \text{ Vale } Q^-(t_0,t_1,0,0) = \operatorname{Ker} W_o(t_0,t_1)$$

▸ Gramiano di ricostruibilità

$$W_{RC}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\phi^T(\tau,t_1)C^T(\tau)C(\tau)\phi(\tau,t_1)d\tau. \text{ Vale } Q^+(t_0,t_1,0,0) = \operatorname{Ker} W_{RC}(t_0,t_1)$$

▸ Proprietà

$$W_o(t_0,t_1) = \phi^T(t_1,t_0)\,W_{RC}(t_0,t_1)\,\phi(t_1,t_0)$$

$$W_{RC}(t_0,t_1) = \phi^T(t_0,t_1)\,W_o(t_0,t_1)\,\phi(t_0,t_1)$$

$$Q^+(t_0,t_1,0,0) = \phi(t_1,t_0)\operatorname{Ker} W_o(t_0,t_1)$$

* CASO STAZIONARIO

▸ Gramiano di osservabilità

$$W_o(0,T) = \int_0^T e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}d\tau$$

▸ Gramiano di ricostruibilità

$$W_{RC}(0,T) = \int_0^T e^{A^T(\tau-T)}C^TCe^{A(\tau-T)}d\tau$$

▸ Matrice di osservabilità

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{bmatrix} \qquad \text{Vale } Q_T^-(0,0) = \operatorname{Ker} Q$$

Proprietà

$$Q_T^+(0,0) = e^{AT} Q_T^-(0,0) \xrightarrow[\text{tempo continuo}]{\text{solo se a}} Q_T^+(0,0) = Q_T^-(0,0) = Q$$

OSSERVABILITÀ E RICOSTRUIBILITÀ - TEMPO DISCRETO

* CASO STAZIONARIO

- Uscita del sistema all'istante K

$$y(K) = CA^K x_0 + \left[CA^{K-1}B, \dots, CAB, CB, D\right] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(K-1) \\ u(K) \end{bmatrix}, \quad K \geq 0$$

- Sottospazio di inosservabilità

$$Q^- = \operatorname{Ker} Q$$

- Proposizione

$$Q_{K_1}^+(0,0) = A^{K_1} Q_{K_1}^-(0,0)$$

- Sottospazio di non ricostruibilità

$$Q^+ = Q_n^+(0,0) = A^n Q^-$$

- Gramiano di osservabilità

$$W_o(0,K_1) = \sum_{j=0}^{K_1-1} (A^T)^j C^T C A^j$$

- Gramiano di ricostruibilità

$$W_{RC}(0,K_1) = \sum_{j=0}^{K_1-1} (A^T)^{-(j+1)} C^T C A^{-(j+1)}$$

FORMA STANDARD DI RAGGIUNGIBILITÀ

Data la coppia (A_r', B_r') con:

$$A_r' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_r' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C_r' = CT = \left[C_1 \,\vdots\, C_2\right] \quad D_r' = D$$

con $A_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ $(n_2 = \dim R^+)$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$

$T = \left[T_1 \,\vdots\, T_2\right]$ dove $\operatorname{im} T_1 = R^+$ e $\operatorname{im}\left[T_1 \,\vdots\, T_2\right] = \mathbb{R}^n$

In questa forma, la matrice di trasferimento è

$$H(s) = C_1\left[sI - A_1\right]^{-1} B_1 + D$$

$\nabla(A) = \nabla(A_1) \cup \nabla(A_2) \Rightarrow$ I modi controllabili sono quelli associati alle radici del polinomio minimo di A_1.

FORMA STANDARD DI OSSERVABILITÀ

Data dalla coppia (C_o', A_o') con

$$A_o' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_o' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad C_o' = CT = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_o' = D$$

con $A_1 \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ ($n_o = $ rango Q), $B_1 \in \mathbb{R}^{n_o \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$

$T = [T_1 \,\vdots\, T_2]$ con $\operatorname{im} T_1 = \mathcal{Q}^-$ e $\operatorname{im}[T_1 \,\vdots\, T_2] = \mathbb{R}^n$

In questa forma la matrice di trasferimento è

$$H(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D$$

SCOMPOSIZIONE CANONICA DI KALMAN

Sia $\mathcal{Q}^- = \operatorname{Ker} Q$ e $\mathcal{R}^+ = \operatorname{im} R$; $n_r = \dim \mathcal{R}^+$, $n_{\bar{o}} = \dim \mathcal{Q}$, $n_{r\bar{o}} = \dim(\mathcal{R}^+ \cap \mathcal{Q}^-)$.

Sia $T = [T_1 \,\vdots\, T_2 \,\vdots\, T_3 \,\vdots\, T_4]$ con

- $\operatorname{im} T_2 = \mathcal{R}^+ \cap \mathcal{Q}^-$
- $\operatorname{im}[T_1, T_2] = \mathcal{R}^+$
- $\operatorname{im}[T_2, T_4] = \mathcal{Q}^-$
- $\operatorname{im}[T_1, T_2, T_3, T_4] = \mathbb{R}^n$

allora

$$A_K' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \qquad B_K' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_K' = CT = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_K = D$$

$A_{11} \in \mathbb{R}^{(n_r - n_{r\bar{o}}) \times (n_r - n_{r\bar{o}})}$; $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_{r\bar{o}} \times n_{r\bar{o}}}$; $A_{33} \in \mathbb{R}^{(n + n_{r\bar{o}} - n_{\bar{o}} - n_r) \times (n + n_{r\bar{o}} - n_{\bar{o}} - n_r)}$; $A_{44} \in \mathbb{R}^{(n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}}) \times (n_{\bar{o}} -}$

$B_1 \in \mathbb{R}^{(n_r - n_{r\bar{o}}) \times m}$; $B_2 \in \mathbb{R}^{n_{r\bar{o}} \times m}$; $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n_r - n_{r\bar{o}})}$; $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n + n_{r\bar{o}} - n_{\bar{o}} - n_r)}$

A_{11} → parte raggiungibile e osservabile

A_{22} → parte raggiungibile e non osservabile

A_{33} → parte non raggiungibile e osservabile

A_{44} → parte non raggiungibile e non osservabile.

Un sistema esternamente equivalente è $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}$.

La matrice di trasferimento è:

$$H(s) = C_1 (sI - A_{11})^{-1} B_1 + D.$$

▶ Passi necessari ad arrivare a uno stato $\tilde{x}$

Si guarda la matrice $R = [\underbrace{B}_{1^\circ \text{passo}} \vdots AB \vdots A^2B \ldots]$ finché non si trova un insieme di vettori che "generano" $\tilde{x}$. k° passo

▶ Stato raggiungibile da un altro

$(x(k) - A^k x(0)) \overset{?}{\in} \operatorname{im} R_k$ con $x(k)$ stato da raggiungere e $x(0)$ stato iniziale.